

MSG830 Statistisk analys och experimentplanering

Tentamen 20 Mars 2015, 8:30 - 12:30

Examinator: Staffan Nilsson, telefon 073 5599 736, kommer till tentamenslokalen 9:30 och 11:30

Tillåtna hjälpmedel: Valfri kalkylator

Antal poäng totalt: 30. För betyget godkänd krävs minst 12 poäng, för väl godkänd 22 poäng

1. Man har noterat att av hemodlade äpplen är 30% maskätna och 40% är angripna av skorv. Dessutom vet vi att 60% av de skorvangripna äpplena samtidigt är maskätna. Beteckna händelser M =maskäten, S =skorv.

- (a) Är M och S oberoende? Motivera!
(b) Beräkna sannolikheten att ett hemodlat äpple varken är maskätet eller angripet av skorv.

(4p)

2. Den finska skidskytten Kaisa Mäkäräinens träffprocent i liggande skytte är 85% och i stående 82%. I grenen sprint skjuter man 5 liggande och 5 stående. För varje bom tvingas man till en straffrunda som tar ca 25 sekunder. Låt L beteckna antalet bom i liggande och S antalet bom i stående. Gör det i och för sig realistiska antagandet att resultatet av varje skott är oberoende händelser.

- (a) Vad är sannolikheten att Kaisa skjuter felfritt?
(b) Vilken fördelning har L respektive S .
(c) Hur lång tid får hon genomsnittligt lägga på straffrundor?

(4p)

3. Vid en undersökning av utsläppen i en flod mätte man vid 7 tillfällen pH-koncentrationen samtidigt uppströms och nedströms ett industriavlopp. Vid mätningarna erhöles följande resultat:

	1	2	3	4	5	6	7
Nedströms	8.40	8.55	8.24	8.12	8.67	8.74	8.30
Uppströms	8.37	8.41	8.33	8.02	8.71	8.66	8.31

- (a) Ange ett 95%igt konfidensintervall för pH-skillnaden mellan nedströms och uppströms.
(b) Kan vi förkasta en nollhypotes att det inte föreligger någon skillnad mot att det gör det på signifikansnivå 0.01?

(4p)

4. Kärnkraftsarbetare utsätts yrkesmässigt för radioaktivitet och detta mäts hela tiden. Under 1973 exponerades i USA 16 arbetare för i genomsnitt 0.94 rem ($s=0.20$) medan 1979 exponerades 16 andra arbetare för i genomsnitt 0.62 rem ($s=0.16$). Testa på signifikansnivå 0.05 om det finns någon skillnad i exponering mellan 1973 och 1979.

(4p)

5. Det finns olika metoder att träna inför högskoleprov och generellt lyckas man bättre vid andra försöket. För att utvärdera metoderna valdes 60 ungdomar i åldern 20-22 ut. De hade alla skrivit ett högskoleprov med resultat i intervallet 47-49 (normerat till 1.3). Efter provet hade de använt en av tre träningsmetoder (Holmegaards bok: Den kompletta guiden till högskoleprovet, Gamla prov och den webbaserade HP-guiden) eller inte tränat alls. Deras ökning i råpoäng räknades ut och de olika grupperna jämfördes med det statistiska test som visas nedan

Ökning

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean		Minimum	Maximum
					Lower Bound	Upper Bound		
Ingen övning	30	10,20	3,398	,620	8,93	11,47	2	15
Holmegaard	10	12,50	3,342	1,057	10,11	14,89	7	18
Gamla prov	10	12,70	2,869	,907	10,65	14,75	9	17
HP-guiden	10	10,90	3,900	1,233	8,11	13,69	5	19
Total	60	11,12	3,484	,450	10,22	12,02	2	19

Ökning

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	69,883	3	23,294	2,018	,122
Within Groups	646,300	56	11,541		
Total	716,183	59			

- (a) Vad kallas testet och kunde man påvisa signifikanta skillnader på signifikansnivå 0.05?
 (b) Föreslå ett annat (starkare) sätt att analysera resultatet för att fastställa om träning lönar sig.

(3p)

6. I ett genetiskt korsningsexperiment av en röd och vit blomma vill man studera om proportionerna röd, rosa, vit skiljer sig åt mellan behandlade blommor och obehandlade. Man utförde 100 korsningar efter behandling och 100 utan behandling och utfallet framgår av tabellen nedan.

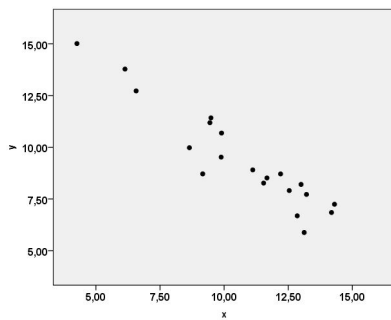
	röd	rosa	vit
Kontroll	20	50	30
Behandlade	33	50	17

Man använde sig av det för ändamålet naturliga testet där man ska förkasta nollhypotesen för stora värden på teststatistikan. Teststatistikan beräknades till 6.784.

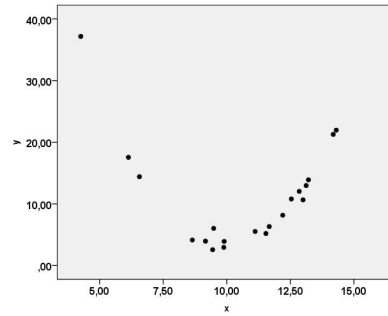
- (a) Vad är det kritiska värdet för detta test på signifikansnivå 0.05 och kunde man alltså förkasta H_0 eller ej?
 (b) I den aktuella situation är det dock tveksamt att använda kontrollgrupp då blommans färg är vad man kallar codominant och därför kan de teoretiska proportionerna bestämmas till 0.25, 0.5, 0.25. Utför ett test som jämför utfallet av de behandlade med teoretiska proportioner istället.

(4p)

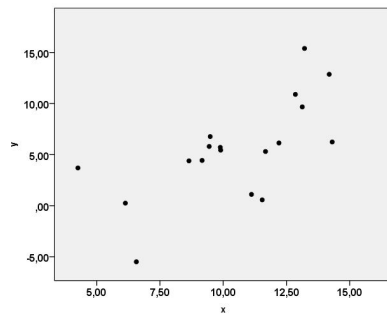
7. De fyra diagrammen a,b,c,d visar på sambandet mellan en variabel x och en variabel y.



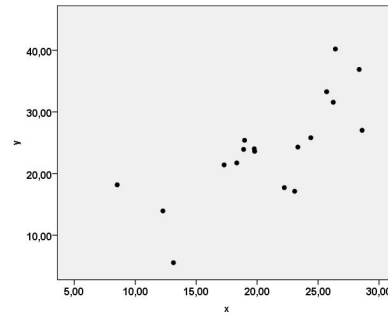
(a)



(b)



(c)



(d)

- (a) Vilken figur hör ihop med $r = -0.196$, $P = 0.437$?
 (b) Vilken figur hör ihop med följande resultat

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,524 ^a	,275	,230	5,64091

a. Predictors: (Constant), x

Coefficients^a

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-6,914	5,233		-1,321	,205
	x	1,195	,485	,524	2,463	,026

a. Dependent Variable: y

- (c) Vilken figur hör ihop med $r = -0.941$, $P < 0.001$?
 (d) Vilken figur hör ihop med förklaringsgraden 0.885?

(e) Vilken figur hör ihop med nedanstående resultat?

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,749 ^a	,561	,534	5,64091

a. Predictors: (Constant), x

(f) Till vilken figur är linjär regression olämplig?

(3p)

8. Man vill testa om en normalfördelad variabel X har ett väntevärde som är $\mu = 100$, mot alternativhypotesen att det är större ($\mu > 100$). Standardavvikelsen σ är känd och med den stickprovsstorlek n man samlat så kan man förkasta H_0 på signifikansnivå 0.05 om $\bar{X} > 110$.

(a) Bestäm σ/\sqrt{n} genom att utveckla

$$P(\bar{X} > 110) = \dots = 0.05$$

under antagandet att $\mu = 100$.

(b) Vid vilket värde μ_1 är styrkan 80%?

Ledning: Utveckla

$$P(\bar{X} > 110) = \dots = 0.8$$

under antagandet att $\mu = \mu_1$, utnyttja svaret i (a) samt att för en standard normalfördelad variabel Z är

$$P(Z > -0.84) = 0.8$$

(4p)

Formler och tabeller till kursen MSG830

Deskriptiva mått För ett datamängd x_1, \dots, x_n definieras

medelvärde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

standardavvikelse

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

standardfelet (SEM)

$$\text{SEM} = s/\sqrt{n}$$

Sannolikheter

För två händelser A och B är gäller

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Betingade sannolikheter

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Lagen om total sannolikhet

Om utfallsrummet indelas i disjunkta händelser A_1, \dots, A_k , vars union är hela utfallsrummet, så gäller för varje händelse B

$$P(B) = \sum_{i=1}^k P(B|A_i)P(A_i)$$

Om $P(A|B) = P(A)$ säges A och B vara oberoende. Detta medför också att A och B är oberoende om och endast om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Stokastiska variabler En diskret stokastisk variabel X kan anta ett ändigt (eller uppräknligt) antal värden. Sannolikeheten för varje värde bestäms av en sannolikhetsfunktion p

$$p(x) = P(X = x)$$

Väntevärdet av en diskret stokastisk variabel är

$$\mu = E[X] = \sum_x xp(x)$$

och variansen är

$$\sigma^2 = V[X] = \sum_x (x - \mu)^2 p(x) = E[X^2] - \mu^2$$

Kontinuerliga stokastiska variabler beskrivs med en täthetsfunktion $f(x) \geq 0$ för alla x och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

För en kontinuerlig stokastisk variabel X är $P(X = x) = 0$ för varje x , men

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)$$

X och Y är oberoende (dvs $P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$) för alla x, y

Regler för väntevärden och varians

Om a, b är konstanter och X, Y är stokastiska variabler gäller

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[a + bX] = a + bE[X]$$

$$V[a + bX] = b^2V[X]$$

om dessutom X och Y är oberoende så gäller

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

och

$$V[X + Y] = V[X] + V[Y]$$

Binomialfördelning $S \sim \text{bin}(n, p)$

$$P(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ för } k = 1, 2, \dots, n$$

$$E[S] = np, V[S] = np(1-p)$$

Normalfördelning $X \sim N(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E[X] = \mu, V[X] = \sigma^2$$

Fördelningen med $\mu = 0$ och $\sigma = 1$ kallas standard (el standardiserad) normalfördelning

Om $X \sim N(\mu, \sigma)$ så är

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

och om vi har ett stickprov X_1, X_2, \dots, X_n så är

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Ett stickprov X_1, X_2, \dots, X_n där varje $X_i \sim N(\mu, \sigma)$

Testa $H_0 : \mu = \mu_0$ på signifikansnivå α med

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \text{ (t-fördelning med } n - 1 \text{ frihetsgrader)}$$

Förkasta H_0 om $|T| \geq t_{\alpha/2, n-1}$ då $H_a : \mu \neq \mu_0$

Förkasta H_0 om $T \geq t_{\alpha, n-1}$ då $H_a : \mu > \mu_0$

Förkasta H_0 om $T \leq -t_{\alpha, n-1}$ då $H_a : \mu < \mu_0$

Bilda ett tvåsidigt $100(1 - \alpha)\%$ konfidensintervall med

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} s/\sqrt{n}$$

Om σ av någon anledning råkar vara känt, ersätt s med σ och använd $z_{\alpha/2}$ istället för $t_{\alpha/2, n-1}$

Om X_i inte är normalfördelad, men stickprovet stort kan vi anta att T ovan är approximativt standard normalfördelad.

Parade data $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$

där varje $D_i = X_i - Y_i \sim N(\delta, \sigma)$

Testa $H_0 : \delta = \delta_0$ (oftast $\delta_0 = 0$) genom att betrakta alla D_i som ett stickprov på differenser och följ anvisningar för ett stickprov.

$$T = \frac{\bar{x} - \delta_0}{s/\sqrt{n}}$$

Två stickprov X_1, X_2, \dots, X_m och Y_1, Y_2, \dots, Y_n

Anta $X_i \sim N(\mu_1, \sigma)$ och $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma)$

Poola de två variansskattningarna s_1^2 och s_2^2 för X resp Y .

$$s_p^2 = \frac{(m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2}{m+n-2}$$

och testa $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ (oftast $\Delta_0 = 0$) på signifikansnivå α med

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0}{s_p \sqrt{1/m + 1/n}} \sim t_{n+m-2} \text{ (t-fördelning med } n+m-2 \text{ frihetsgrader)}$$

Förkasta H_0 om $|T| \geq t_{\alpha/2, n+m-2}$ då $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$

Förkasta H_0 om $T \geq t_{\alpha, n+m-2}$ då $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$

Förkasta H_0 om $T \leq -t_{\alpha, n+m-2}$ då $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$

Bilda ett tvåsidigt $100(1 - \alpha)\%$ konfidensintervall med

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2, n-2} s_p \sqrt{1/m + 1/n}$$

ANOVA - Fler än två stickprov ($k > 2$) Anta att de olika grupperna är normalfördelade $N(\mu_i, \sigma)$, dvs eventuellt olika medelvärden, men samma varians.

Man kan då testa

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

mot

$$H_a : \text{någon skillnad mellan medelvärdena}$$

med

$$F = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_W^2}$$

där $\hat{\sigma}_W^2$ är den poolade variansen analogt med tvåstickprovsfallet och $\hat{\sigma}_B^2$ är en skattning av σ baserad på medelvärdena.

Förkasta H_0 för stora värden på teststatistikan

Test av samband mellan två kategoriska variabler

Samla antalen av varje kategoripar i en kontingenstabell med r rader och c kolumner

	1	...	j	...	c	
1	n_{11}	...	n_{1j}	...	n_{1c}	$n_{1.}$
...
i	n_{i1}	...	n_{ij}	...	n_{ic}	$n_{i.}$
...
r	n_{r1}	...	n_{rj}	...	n_{rc}	$n_{r.}$
	$n_{.1}$...	$n_{.j}$...	$n_{.c}$	n

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^c n_{ij} \text{ och } n_{.j} = \sum_{i=1}^r n_{ij}$$

Anta att följande sannolikheter gäller för cellerna och marginalerna

	1	...	j	...	c	
1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1c}	$p_{1.}$
...
i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{ic}	$p_{i.}$
...
r	p_{r1}	...	p_{rj}	...	p_{rc}	$p_{r.}$
	$p_{.1}$...	$p_{.j}$...	$p_{.c}$	1

Testa $H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$ för alla par i, j (dvs oberoende) med

$$\chi^2 = \sum \sum \frac{(n_{ij} - \hat{e}_{ij})^2}{\hat{e}_{ij}}$$

som är approximativt χ^2 fördelad med $(r-1)(c-1)$ frihetsgrader och där $\hat{e}_{ij} = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$. För att approximationen ska vara god bör $\hat{e}_{ij} \geq 5$ för minst 80% av cellerna.

Förkasta H_0 för stora värden på teststatistikan

Goodness of fit För att testa om en kategorisk variabel med k kategorier följer förutbestämda proportioner p_1, p_2, \dots, p_k används ett chi2-test.

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

som är approximativt χ^2 fördelad med $k-1$ frihetsgrader. För att approximationen ska vara god bör $np_i \geq 5$ för varje i . H_0 förkastas för stora värden på χ^2 .

Regression Vid linjär regression med n observationspar (x_i, y_i) skattar man en linje mha modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

där $\epsilon \sim N(0, \sigma)$ är "bruset".

Skattningar får man genom

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Test av $H_0 : \beta_1 = 0$ testas med en teststatistika av typen

$$T = \frac{\hat{\beta}_1}{se(\hat{\beta}_1)}$$

som är t -fördelad med $n - 2$ frihetsgrader

Korrelation

Pearsons korrelationskoefficient r är ett mått mellan -1 och 1 .

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

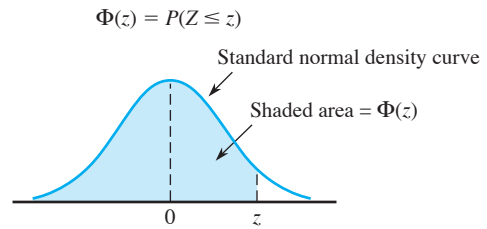
som skattar en motsvarande populationsstorhet ρ . Om X och Y är oberoende så är $\rho = 0$.

Man kan testa $H_0 : \rho = 0$ med

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

som är t -fördelad med $n - 2$ frihetsgrader och identisk med teststatistikan för $H_0 : \beta_1 = 0$ från regressionsanalysen.

Table A.3 Standard Normal Curve Areas



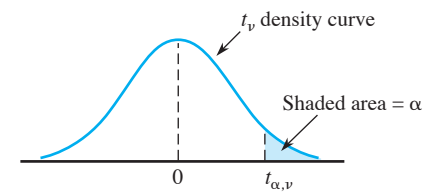
<i>z</i>	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0038
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3482
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

(continued)

Table A.3 Standard Normal Curve Areas (cont.)

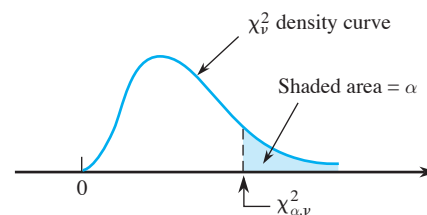
$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Table A.5 Critical Values for t Distributions

ν	α						
	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.262	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

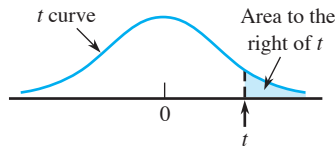
Table A.7 Critical Values for Chi-Squared Distributions



ν	α									
	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.01	.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.440	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.688	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.147	17.708	19.768	39.087	42.557	45.772	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.584	19.960	22.105	24.075	26.492	48.363	52.192	55.667	59.891	62.880
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.994	21.425	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.119	62.426	65.473
40	20.706	22.164	24.433	26.509	29.050	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

For $\nu > 40$, $\chi^2_{\alpha, \nu} \approx \nu \left(1 - \frac{2}{9\nu} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{2}{9\nu}} \right)^3$

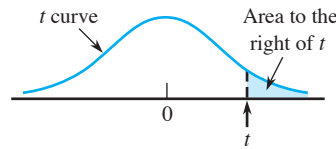
Table A.8 *t* Curve Tail Areas



<i>t</i>	<i>v</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0.0		.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1		.468	.465	.463	.463	.462	.462	.462	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461
0.2		.437	.430	.427	.426	.425	.424	.424	.423	.423	.423	.423	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422
0.3		.407	.396	.392	.390	.388	.387	.386	.386	.386	.385	.385	.385	.384	.384	.384	.384	.384	.384
0.4		.379	.364	.358	.355	.353	.352	.351	.350	.349	.349	.348	.348	.348	.347	.347	.347	.347	.347
0.5		.352	.333	.326	.322	.319	.317	.316	.315	.315	.314	.313	.313	.313	.312	.312	.312	.312	.312
0.6		.328	.305	.295	.290	.287	.285	.284	.283	.282	.281	.280	.280	.279	.279	.279	.278	.278	.278
0.7		.306	.278	.267	.261	.258	.255	.253	.252	.251	.250	.249	.249	.248	.247	.247	.247	.247	.246
0.8		.285	.254	.241	.234	.230	.227	.225	.223	.222	.221	.220	.220	.219	.218	.218	.218	.217	.217
0.9		.267	.232	.217	.210	.205	.201	.199	.197	.196	.195	.194	.193	.192	.191	.191	.191	.190	.190
1.0		.250	.211	.196	.187	.182	.178	.175	.173	.172	.170	.169	.169	.168	.167	.167	.166	.166	.165
1.1		.235	.193	.176	.167	.162	.157	.154	.152	.150	.149	.147	.146	.146	.144	.144	.144	.143	.143
1.2		.221	.177	.158	.148	.142	.138	.135	.132	.130	.129	.128	.127	.126	.124	.124	.124	.123	.123
1.3		.209	.162	.142	.132	.125	.121	.117	.115	.113	.111	.110	.109	.108	.107	.107	.106	.105	.105
1.4		.197	.148	.128	.117	.110	.106	.102	.100	.098	.096	.095	.093	.092	.091	.091	.090	.090	.089
1.5		.187	.136	.115	.104	.097	.092	.089	.086	.084	.082	.081	.080	.079	.077	.077	.077	.076	.075
1.6		.178	.125	.104	.092	.085	.080	.077	.074	.072	.070	.069	.068	.067	.065	.065	.065	.064	.064
1.7		.169	.116	.094	.082	.075	.070	.065	.064	.062	.060	.059	.057	.056	.055	.055	.054	.054	.053
1.8		.161	.107	.085	.073	.066	.061	.057	.055	.053	.051	.050	.049	.048	.046	.046	.045	.045	.044
1.9		.154	.099	.077	.065	.058	.053	.050	.047	.045	.043	.042	.041	.040	.038	.038	.038	.037	.037
2.0		.148	.092	.070	.058	.051	.046	.043	.040	.038	.037	.035	.034	.033	.032	.032	.031	.031	.030
2.1		.141	.085	.063	.052	.045	.040	.037	.034	.033	.031	.030	.029	.028	.027	.027	.026	.025	.025
2.2		.136	.079	.058	.046	.040	.035	.032	.029	.028	.026	.025	.024	.023	.022	.022	.021	.021	.021
2.3		.131	.074	.052	.041	.035	.031	.027	.025	.023	.022	.021	.020	.019	.018	.018	.018	.017	.017
2.4		.126	.069	.048	.037	.031	.027	.024	.022	.020	.019	.018	.017	.016	.015	.015	.014	.014	.014
2.5		.121	.065	.044	.033	.027	.023	.020	.018	.017	.016	.015	.014	.013	.012	.012	.012	.011	.011
2.6		.117	.061	.040	.030	.024	.020	.018	.016	.014	.013	.012	.012	.011	.010	.010	.010	.009	.009
2.7		.113	.057	.037	.027	.021	.018	.015	.014	.012	.011	.010	.010	.009	.008	.008	.008	.008	.007
2.8		.109	.054	.034	.024	.019	.016	.013	.012	.010	.009	.009	.008	.008	.007	.007	.006	.006	.006
2.9		.106	.051	.031	.022	.017	.014	.011	.010	.009	.008	.007	.007	.006	.005	.005	.005	.005	.005
3.0		.102	.048	.029	.020	.015	.012	.010	.009	.007	.007	.006	.006	.005	.004	.004	.004	.004	.004
3.1		.099	.045	.027	.018	.013	.011	.009	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
3.2		.096	.043	.025	.016	.012	.009	.008	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.002
3.3		.094	.040	.023	.015	.011	.008	.007	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002
3.4		.091	.038	.021	.014	.010	.007	.006	.005	.004	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002
3.5		.089	.036	.020	.012	.009	.006	.005	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.6		.086	.035	.018	.011	.008	.006	.004	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.7		.084	.033	.017	.010	.007	.005	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.8		.082	.031	.016	.010	.006	.004	.003	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.9		.080	.030	.015	.009	.006	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
4.0		.078	.029	.014	.008	.005	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000

(continued)

Table A.8 *t* Curve Tail Areas (cont.)



<i>t</i> \ <i>ν</i>	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	60	120	$\infty (= z)$
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.460	.460	.460	.460	.460
0.2	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421
0.3	.384	.384	.384	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.382	.382
0.4	.347	.347	.347	.347	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.345	.345	.345
0.5	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.310	.310	.310	.310	.310	.309	.309	.309
0.6	.278	.278	.278	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.276	.276	.275	.275	.274
0.7	.246	.246	.246	.246	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.244	.244	.243	.243	.242
0.8	.217	.217	.216	.216	.216	.216	.216	.215	.215	.215	.215	.215	.215	.214	.213	.213	.212
0.9	.190	.189	.189	.189	.189	.189	.188	.188	.188	.188	.188	.188	.187	.187	.186	.185	.184
1.0	.165	.165	.164	.164	.164	.164	.163	.163	.163	.163	.163	.163	.162	.162	.161	.160	.159
1.1	.143	.142	.142	.142	.141	.141	.141	.141	.141	.140	.140	.140	.139	.139	.138	.137	.136
1.2	.122	.122	.122	.121	.121	.121	.121	.120	.120	.120	.120	.120	.119	.119	.117	.116	.115
1.3	.105	.104	.104	.104	.103	.103	.103	.103	.102	.102	.102	.102	.101	.101	.099	.098	.097
1.4	.089	.089	.088	.088	.087	.087	.087	.087	.086	.086	.086	.086	.085	.085	.083	.082	.081
1.5	.075	.075	.074	.074	.074	.073	.073	.073	.073	.072	.072	.072	.071	.071	.069	.068	.067
1.6	.063	.063	.062	.062	.062	.061	.061	.061	.061	.060	.060	.060	.059	.059	.057	.056	.055
1.7	.053	.052	.052	.052	.051	.051	.051	.051	.050	.050	.050	.050	.049	.048	.047	.046	.045
1.8	.044	.043	.043	.043	.042	.042	.042	.042	.042	.041	.041	.041	.040	.040	.038	.037	.036
1.9	.036	.036	.036	.035	.035	.035	.035	.034	.034	.034	.034	.034	.033	.032	.031	.030	.029
2.0	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028	.028	.027	.027	.027	.026	.025	.024	.023
2.1	.025	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.023	.023	.022	.022	.022	.022	.021	.020	.019	.018
2.2	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.018	.018	.018	.018	.018	.017	.017	.016	.015	.014
2.3	.016	.016	.016	.016	.015	.015	.015	.015	.015	.015	.014	.014	.014	.013	.012	.012	.011
2.4	.013	.013	.013	.013	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.011	.011	.011	.010	.009	.008
2.5	.011	.011	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.009	.009	.009	.009	.009	.008	.008	.007	.006
2.6	.009	.009	.008	.008	.008	.008	.008	.008	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.006	.005	.005
2.7	.007	.007	.007	.007	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.003
2.8	.006	.006	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
2.9	.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.002	.002
3.0	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.001
3.1	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.2	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.3	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000
3.4	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000
3.5	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000
3.6	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3.7	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.8	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.9	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4.0	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000